Polinomi

Un polinomio è la somma algebrica di più monomi; i singoli monomi, in tal caso, assumono il nome di termini del polinomio. Ad esempio

$a^2 + ab + 2b \quad ; \quad \frac{2}{3}a^2 - 3ab + \frac{b}{2}$

Un polinomio si dice binomio, trinomio, quadrinomio, a secondo che abbia due tre o quattro termini.

$7x^2 + y^2$ *è un binomio*

$3a + 4y^2 - 2$ *è un trinomio*

$a + b - 5c + d^2$ *è un quadrinomio*

Un polinomio si dice intero se tutti i suoi termini sono monomi interi, un polinomio si dice frazionario (o fratto), se in qualcuno dei monomi che lo compongono, compaiono lettere al denominatore.

$18a^2b^2 - \frac{9}{5}b^2 + c^2$ *è un polinomio intero*

$\frac{3}{2}a^4b^2 - \frac{4a}{b^2} + b + c$ *è un polinomio frazionario*

se in un polinomio appaiono dei termini simili, conviene fare la cosiddetta riduzione in termini simili; ossia sostituire a più termini simili un termine simile ad essi avente per coefficiente la somma algebrica dei coefficienti. Il polinomio che si ottiene si dice ridotto a forma normale.

$$3a^2 + 5ab - 2a^2 + 3b^2 - 2ab - 3b^2 = (3-2)a^2 + (5-2)ab + (3-3)b^2 =$$
$$= a^2 + 3ab$$

Il grado di un polinomio intero, rispetto ad una lettera, è l'esponente maggiore che ha quella lettera; invece il grado, rispetto all'insieme delle lettere (ossia il grado complessivo), è dato dal grado del termine che ha il grado più alto.

$$2a^2b + 3a^5 - 2a^2b^4$$

è di 2° grado rispetto alla lettera a, è di 4° grado rispetto alla lettera b, è di 7° grado rispetto all'insieme delle lettere.

Un polinomio si dice ordinato secondo le potenze crescenti o decrescenti di una lettera se i suoi termini sono disposti in modo che gli esponenti di quella lettera vadano crescendo o decrescendo. La lettera si chiama ordinatrice

$3ab + a^2 - 5a^4b^2 + 2a^5$ *ordinato secondo potenze crescenti di a*

$2a^4 - 3a^2b + 5ab - 3$ *ordinato secondo potenze decrescenti di a*

un polinomio, si dice omogeneo se tutti i suoi termini sono dello stesso grado.ad esempio:

$2a^3 + ab^2 - 3b^3 - 2a^2 b$ *infatti tutti i monomi che lo compongono, sono di 3°grado*

Un polinomio si dice completo rispetto ad una lettera, se contiene tutte le potenze di quella lettera, dalla massima, fino alla potenza zero. In caso contrario si dice incompleto.

$\frac{2}{3}a^5 - a^4 b + 5a^3 + a^2 b^2 - ab + 4$ *è completo rispetto alla lettera a*

infatti dalla potenza 5, decrescendo, sono presenti tutte le potenze di a:a^4, a^3, a^2, a^1, a^0.

$\frac{2}{3}a^5 - 2a^3 + a - 2$ *è incompleto rispetto ad a*

mancano infatti le potenze del 4 e del 2

Somma algebrica di polinomi

Più polinomi, riuniti dai segni di addizione e sottrazione, costituiscono una somma algebrica. Ad esempio:

$$(2a^2 + b^2) + (-a^2 + 3ab + c) - (5a^2 - ab + b^2) - (-a^2 + c) =$$
$$= 2a^2 + b^2 - a^2 - 3ab + c - 5a^2 + ab - b^2 + a^2 - c = -3a^2 - 2ab$$

Prodotto di un polinomio per un monomio

Per moltiplicare un polinomio per un monomio, si moltiplica ciascun termine del polinomio per il monomio e si addizionano i prodotti parziali ottenuti (si applica la proprietà distributiva) ad esempio:

$$(a + b - c) \cdot m = a \cdot m + b \cdot m + c \cdot m$$

in maniera del tutto analoga

$$\left(2x^2 - \frac{3}{2}xy^3 + \frac{3}{5}y^2\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}xy^2\right) = -3x^3 y^2 + \frac{9}{4}x^2 y^5 - \frac{9}{10}xy^4$$

Prodotto di polinomi

Per moltiplicare un polinomio per un altro polinomio, si moltiplica ciascun termine del primo di essi per ciascun termine dell'altro e si addizionano i prodotti parziali ottenuti, riducendo i termini simili. (si applica ancora la proprietà distributiva).

$$(2a - 3b) \cdot (a - 2b + 4) = 2a^2 - 4ab + 8a - 3ab + 6b^2 - 12b =$$
$$= 2a^2 - 7ab + 8a + 6b^2 - 12b$$

Semplificare le seguenti espressioni

Esercizio 1

$$\left(\frac{1}{3}x+1\right)\cdot\left(\frac{1}{3}x-1\right)+1-\left(\frac{1}{2}x+2y\right)\cdot(xy-2)+x\cdot\left(\frac{1}{2}xy+2y^2-1\right) \qquad R.\left[\frac{1}{9}x^2+4y\right]$$

Svolgimento:

$$\left(\frac{1}{9}x^2-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}x-1\right)+1-\left(\frac{1}{2}x^2y-\frac{1}{2}\cdot 2x+2xy^2-4y\right)+\left(\frac{1}{2}x^2y+2xy^2-x\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{9}x^2-1\right)+1-\left(\frac{1}{2}x^2y-x+2xy^2-4y\right)+\left(\frac{1}{2}x^2y+2xy^2-x\right)=$$

$$=\frac{1}{9}x^2-1+1-\frac{1}{2}x^2y+x-2xy^2+4y+\frac{1}{2}x^2y+2xy^2-x=$$

$$=\frac{1}{9}x^2+4y$$

Esercizio 2

$$\left(\frac{1}{9}x^2+xy+y^2\right)\cdot\left(\frac{1}{3}x+y\right)-\frac{4}{3}xy\cdot\left(\frac{1}{3}x+y\right) \qquad R.\left[\frac{1}{27}x^3+y^3\right]$$

Svolgimento

$$\left(\frac{1}{9}x^2+xy+y^2\right)\cdot\left(\frac{1}{3}x+y\right)-\frac{4}{3}xy\cdot\left(\frac{1}{3}x+y\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{27}x^3+\frac{1}{9}x^2y+\frac{1}{3}x^2y+xy^2+\frac{1}{3}xy^2+y^3\right)-\frac{4}{9}x^2y-\frac{4}{3}xy^2=$$

$$=\frac{1}{27}x^3+\frac{1}{9}x^2y+\frac{1}{3}x^2y+xy^2+\frac{1}{3}xy^2+y^3-\frac{4}{9}x^2y-\frac{4}{3}xy^2=$$

$$=\frac{1}{27}x^3+\frac{1+3}{9}x^2y+\frac{3+1}{3}xy^2+y^3-\frac{4}{9}x^2y-\frac{4}{3}xy^2=$$

$$=\frac{1}{27}x^3+\frac{4}{9}x^2y+\frac{4}{3}xy^2+y^3-\frac{4}{9}x^2y-\frac{4}{3}xy^2=\frac{1}{27}x^3+y^3$$

Esercizio 3

$$2a^2-\left[3ab-a^2-(2b^2-ab)+2ab-(4a^2+3b^2)\right] \qquad R.\left[7a^2-6ab+5b^2\right]$$

svolgimento

$$2a^2-\left[3ab-a^2-(2b^2-ab)+2ab-(4a^2+3b^2)\right]=$$

$$=2a^2-\left[3ab-a^2-2b^2+ab+2ab-4a^2-3b^2\right]=$$

$$=2a^2-3ab+a^2+2b^2-ab-2ab+4a^2+3b^2=$$

$$=(2+1+4)a^2+(-3-1-2)ab+(2+3)b^2=$$

$$=7a^2+(-6)ab+5b^2=$$

$$=7a^2-6ab+5b^2$$

Esercizio 4

$$\frac{1}{3}ab^2\left(\frac{3}{2}b+1\right)-\frac{1}{3}ab\left(\frac{2}{5}b-1\right)-\frac{1}{5}ab\left(b+\frac{5}{3}\right) \qquad R.\left[\frac{1}{2}ab^3\right]$$

svolgimento

$$\frac{1}{3}ab^2\left(\frac{3}{2}b+1\right)-\frac{1}{3}ab\left(\frac{2}{5}b-1\right)-\frac{1}{5}ab\left(b+\frac{5}{3}\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}ab^{2+1}+\frac{1}{3}ab^2-\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}ab^{1+1}+\frac{1}{3}ab-\frac{1}{5}ab^{1+1}-\frac{1}{5}\cdot\frac{5}{3}ab=$$

$$=\frac{1}{2}ab^3+\frac{1}{3}ab^2-\frac{2}{15}ab^2+\frac{1}{3}ab-\frac{1}{5}ab^2-\frac{1}{3}ab=$$

$$=\frac{1}{2}ab^3+\frac{5-2-3}{15}ab^2=\frac{1}{2}ab^3+\frac{0}{15}ab^2=\frac{1}{2}ab^3$$

Esercizio 5

$$\frac{1}{5}x^3y-\frac{1}{5}xy\cdot\left(x^2+\frac{5}{2}xy+y^2\right)-\frac{1}{45}xy^3-\frac{2}{3}x\cdot\left(y^2-\frac{1}{3}y^3\right) \qquad R.\left[-\frac{1}{2}x^2y^2-\frac{2}{3}xy^2\right]$$

svolgimento

$$\frac{1}{5}x^3y-\frac{1}{5}xy\cdot\left(x^2+\frac{5}{2}xy+y^2\right)-\frac{1}{45}xy^3-\frac{2}{3}x\cdot\left(y^2-\frac{1}{3}y^3\right)=$$

$$=\frac{1}{5}x^3y-\frac{1}{5}x^3y-\frac{1}{5}\cdot\frac{5}{2}x^2y^2-\frac{1}{5}xy^3-\frac{1}{45}xy^3-\frac{2}{3}xy^2+\frac{2}{9}xy^3=$$

$$=-\frac{1}{2}x^2y^2+\frac{2\cdot 5-1\cdot 9-1}{45}xy^3-\frac{2}{3}xy^2=$$

$$=-\frac{1}{2}x^2y^2+\frac{10-9-1}{45}xy^3-\frac{2}{3}xy^2=-\frac{1}{2}x^2y^2+\frac{0}{45}xy^3-\frac{2}{3}xy^2=-\frac{1}{2}x^2y^2-\frac{2}{3}xy^2$$